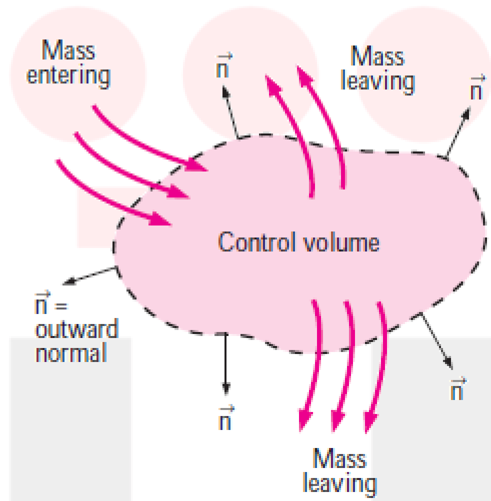
Bloque I: Dinámica de Fluidos

Tema 2. Ecuaciones de Conservación



$$B_{net} = B_{out} - B_{in} = \int_{CS} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA$$

1. Introducción
   1.1. Enfoques de Lagrange y Euler
   1.2. Caudal a través de una Superficie Elemental

2. Leyes de Conservación
   2.1. Ecuación General de Transporte de Reynolds
   2.2. Conservación de la Masa: Ecuación de Continuidad
   2.3. Conservación de la Cantidad de Movimiento (Momentum)
   2.4. Conservación de la Energía: Ecuación de Bernoulli

Grado de Ingeniería de la Energía

Alicia García Sánchez

Universidad Rey Juan Carlos

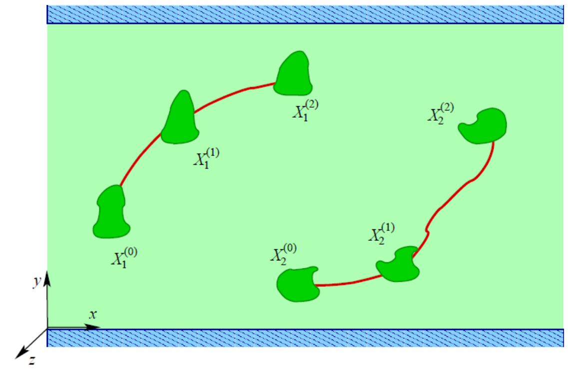
1. Introducción

Análisis LAGRANGIANO

Descripción detallada del flujo en cada punto (**x,y,z**) del campo fluido.

Se sigue la **huella** de la **posición** y la **velocidad** de cada partícula.

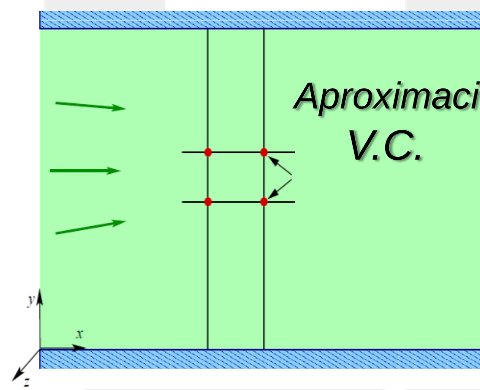
Fluido formado por *miles de millones de moléculas* (punto de vista microscópico).



Análisis EULERIANO

Se trabaja con una **región finita del espacio,** realizando un **balance** entre el **fluido que entra y que sale** de ella, y determinando los efectos netos, como la fuerza o el momento sobre un cuerpo o el cambio de energía total.

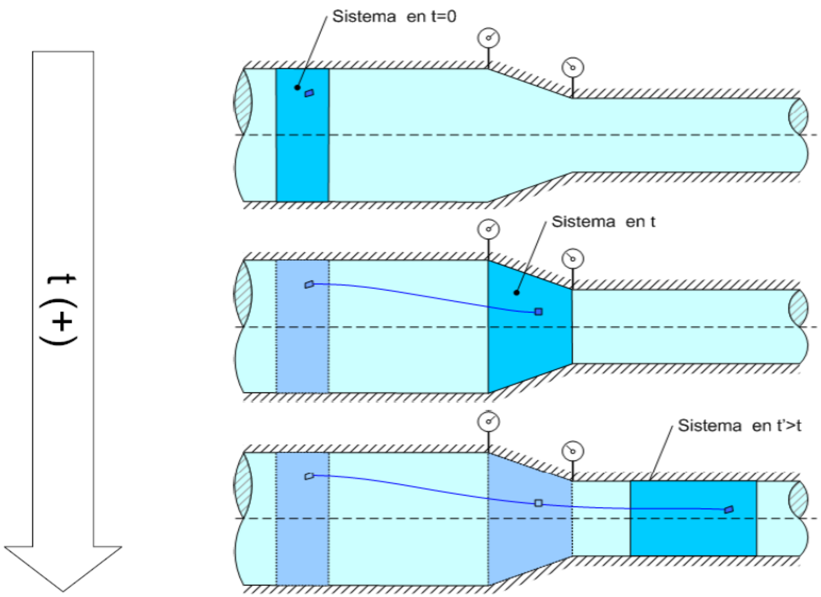
Descripción del flujo del fluido a través de un volumen finito, **volumen de control** (punto de vista macroscópico).



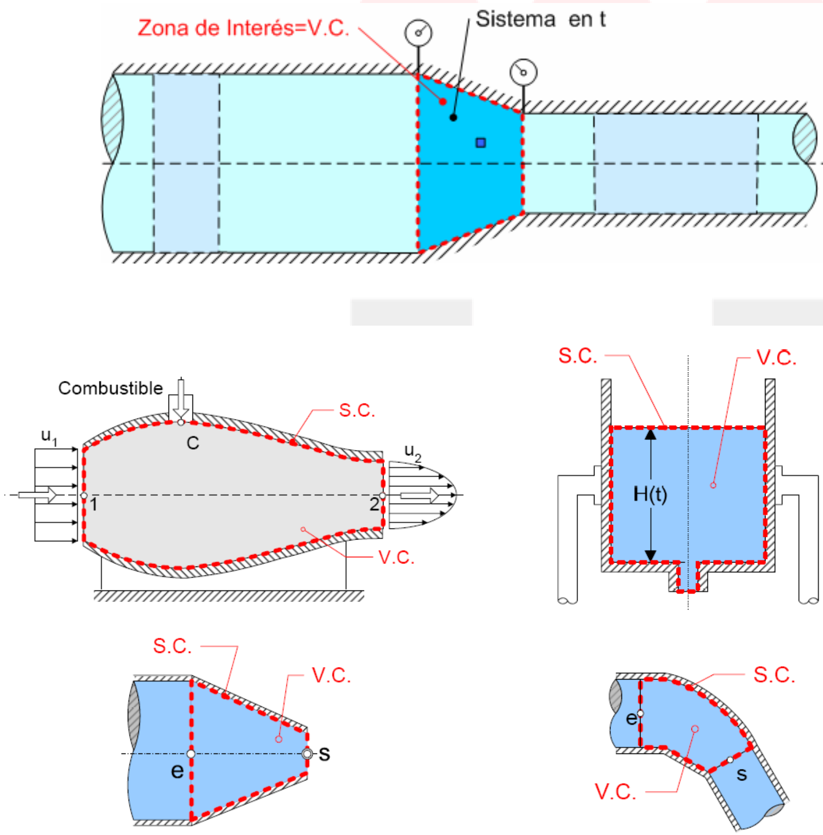
Aproximación de V.C.

1. Introducción

Análisis LAGRANGIANO



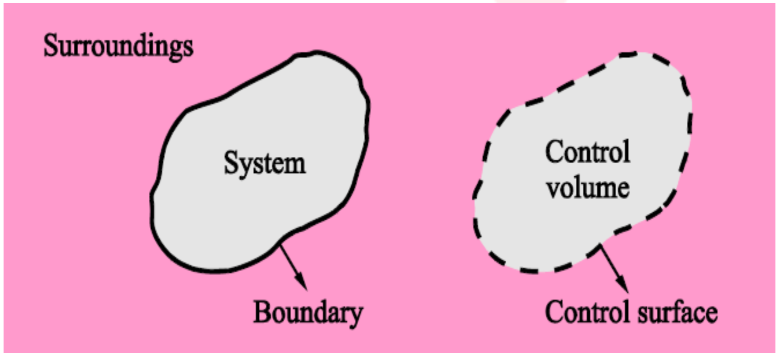
Análisis EULERIANO

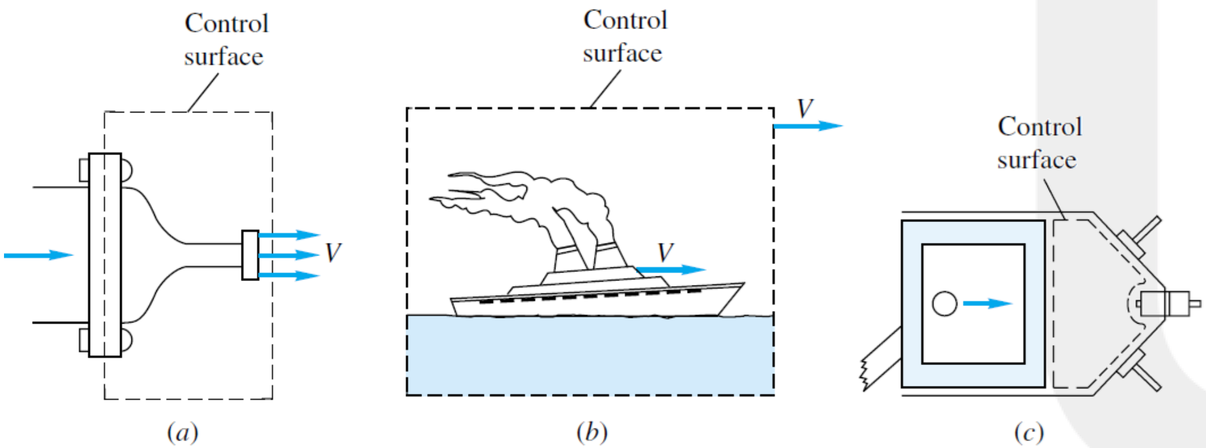


¡El Enfoque de Euler será el adoptado en Ingeniería de Fluidos!

Concepto de Volumen de Control

- Región del espacio, rodeada de un entorno, separados por una frontera.
- Su frontera (superficie de control) permite el paso de materia.
- Tiempo t $\Rightarrow$ cantidad de masa.
- FIJO, MÓVIL o DEFORMABLE.

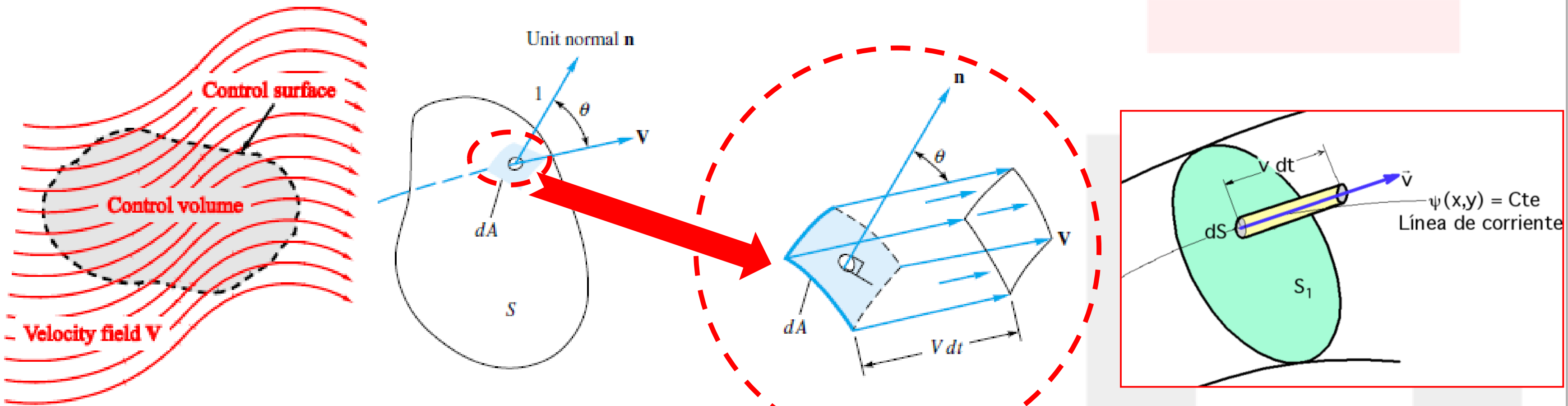




Examples of fixed (a), moving (b), and deformable (c) control volumes are shown.

Caudal a través de una Superficie Elemental

PREGUNTA: ¿Qué cantidad de volumen o materia pasa a través de la superficie de control por unidad de tiempo?



Two-dimensional presentation of a control volume in a velocity field.

Caudal a través de una Superficie Elemental

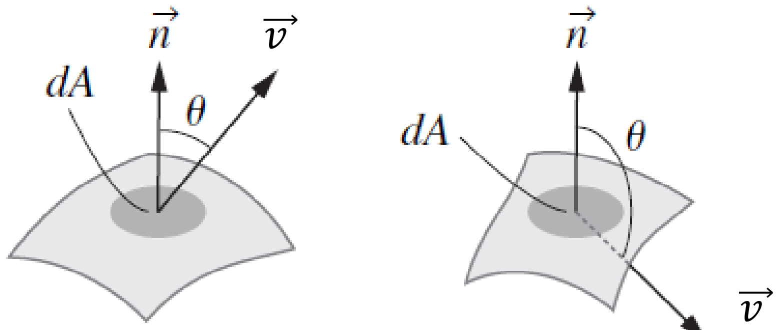
Velocidad del fluido que atraviesa la S.C.:

$$\vec{v} \Longrightarrow \vec{v} \cdot \vec{n} = v \cdot \cos\theta$$

Volumen de fluido que atraviesa la S.C.:

$$dV = L \cdot dS = \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dt \cdot dS$$

$$dV = L \cdot dS = v \cdot \cos\theta \cdot dt \cdot dS$$



Flujo de salida: $\theta < 90°$

Flujo de entrada: $\theta > 90°$

Caudal de fluido que atraviesa la S.C.:

$$Q = \frac{dV}{dt} = \int_S \vec{v} \cdot dS = \int_S v \cdot \cos\theta \cdot dS$$

$\vec{v} \cdot \vec{n} = |\vec{v}||\vec{n}| \cos\theta = v \cos\theta$

Si $\theta < 90°$, entonces $\cos\theta > 0$ (flujo de salida).

Si $\theta > 90°$, entonces $\cos\theta < 0$ (flujo de entrada).

Si $\theta = 90°$, entonces $\cos\theta = 0$ (ningún flujo).

Caudal a través de una Superficie Elemental

Caudal de fluido que atraviesa la S.C.:

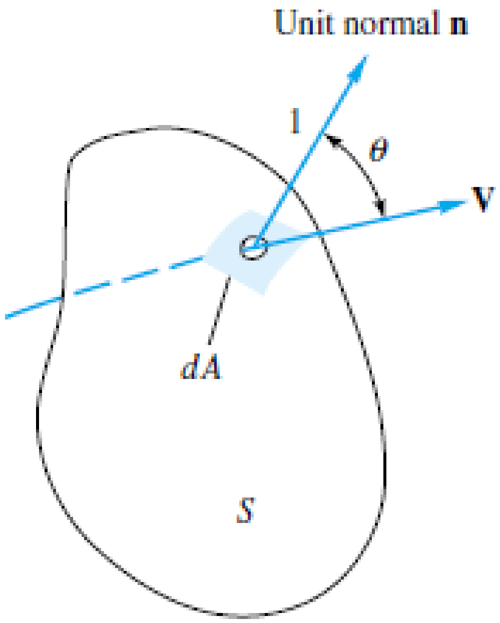
$$Q = \frac{dV}{dt} = \int_S \vec{v} \cdot dS = \int_S v \cdot \cos\theta \cdot dS$$

Velocidad media correspondiente a la sección S:

$$v_{media} = \frac{\int_S \vec{v} \cdot dS}{S} = \frac{Q}{S}$$

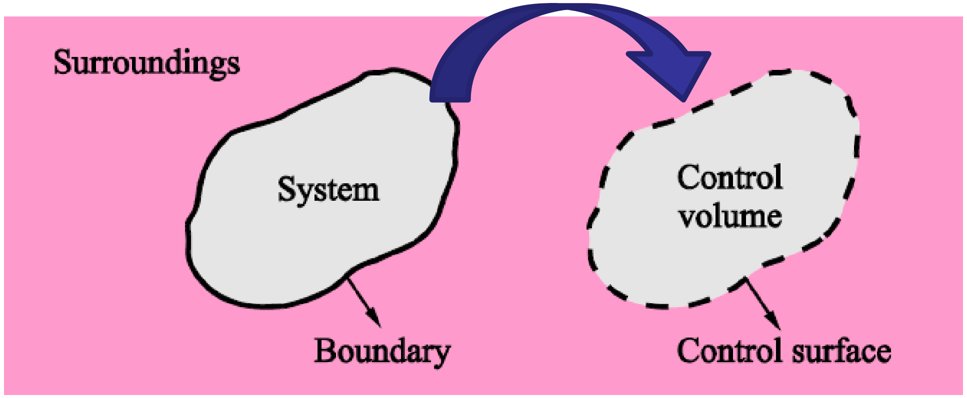
Caudal másico, m que atraviesa la S.C.:

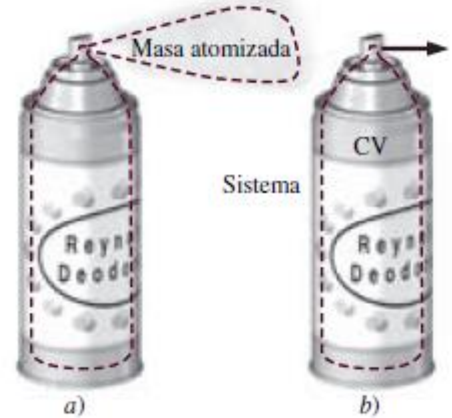
$$m = \rho \cdot Q = \int_S \rho \cdot v \cdot dS = \int_S \rho \cdot v \cdot \cos\theta \cdot dS$$



2. Leyes de Conservación

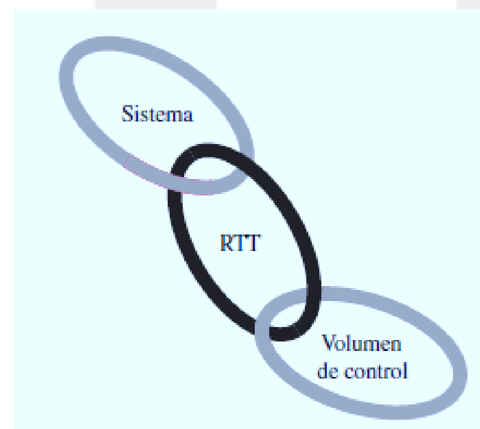
Ecuación de Transporte de Reynolds





Sistema: Cantidad de materia de masa fija
→ Termodinámica y mecánica de sólidos
Tamaño y forma pueden cambiar,
no intercambia nada de materia.

Volumen control: Región del espacio elegida para su estudio
→ Dinámica de fluidos.
Se permite entrada y salida de materia.
Puede moverse y deformarse durante un proceso.



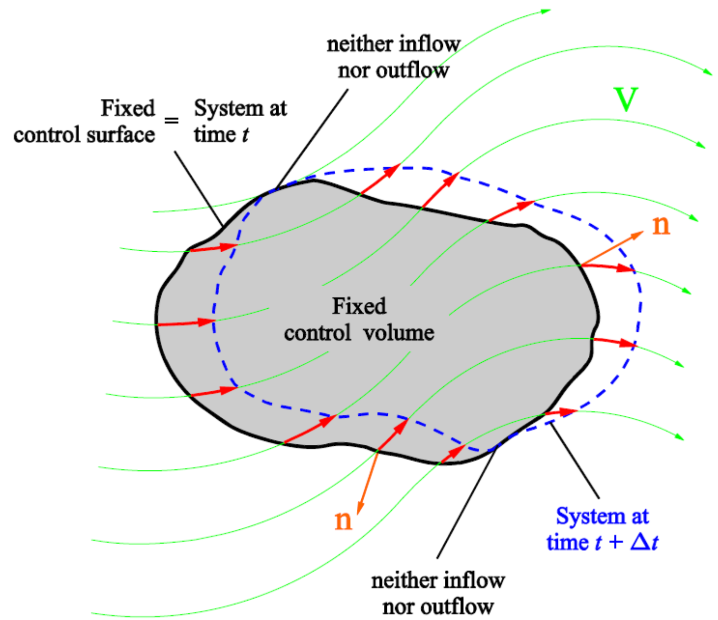
Ecuación de Transporte de Reynolds   VC fijo

Zonas de entrada y salida variables en la S.C.

N: cantidad total de una propiedad cualquiera del sistema (masa, energía, cantidad de mov. lineal, etc).

Cantidad específica: $$\eta = \frac{N}{m} \rightarrow d\eta = \frac{dN}{dm}$$

[cantidad por unidad de masa]

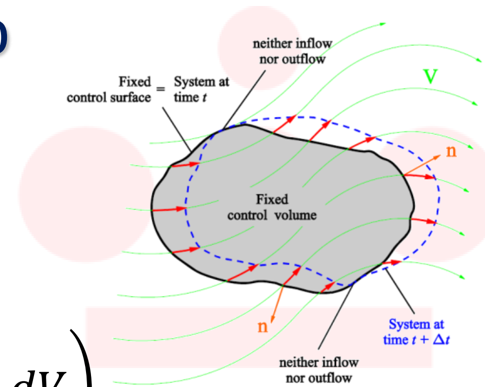


Cantidad total de **N** en el volumen de control a un tiempo t:

$$N_{VC} = \int_{VC} \frac{dN}{dm} \cdot dm = \int_{VC} \eta \cdot dm$$

$$N_{VC} = \int_{VC} \eta \cdot \rho \cdot dV$$

Ecuación de Transporte de Reynolds VC fijo



$$N_{VC} = \int_{VC} \eta\, \rho\, dV$$

¿Cómo puede cambiar **N** en el volumen de control?

1. Cambios con el tiempo dentro del volumen de control ➡ $\dfrac{d}{dt}\left(\int_{VC} \eta\, \rho\, dV\right)$

2. Salida de N a través de la superficie de control ➡ $\int_{VC} \eta\, \rho\, \vec{v}\, dS_{salida}$

3. Entrada de N a través de la superficie de control ➡ $\int_{VC} \eta\, \rho\, \vec{v}\, dS_{entrada}$

$$\boxed{\frac{d}{dt} N_{VC} = \frac{d}{dt}\left(\int_{VC} \eta\, \rho\, dV\right) + \int_{VC} \eta\, \rho\, \vec{v}\, dS_{salida} - \int_{VC} \eta\, \rho\, \vec{v}\, dS_{entrada}}$$

2. Leyes de Conservación

Ecuación de Transporte de Reynolds   VC fijo

$$\frac{d}{dt}N_{VC} = \frac{d}{dt}\left(\int_{VC} \eta\,\rho\,dV\right) + \int_{VC} \eta\,\rho\,\vec{v}\,dS_{salida} - \int_{VC} \eta\,\rho\,\vec{v}\,dS_{entrada}$$

Término de flujo neto de **N**: $\displaystyle\int_{VC} \eta\,dm_{salida} - \int_{VC} \eta\,dm_{entrada}$

$$\vec{v} \Longrightarrow \vec{v}\cdot\vec{n} = v\cdot\cos\theta \;\}$$

+ flujo de salida
- flujo de entrada

$$\} \quad \oint_{SC} \eta\,\rho\,\vec{v}\,dS$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}N_{VC} = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t}\eta\,\rho\,dV + \oint_{SC} \eta\,\rho\,\vec{v}\,dS}$$

"La **tasa temporal de incremento de una propiedad** del sistema es igual a la tasa temporal del incremento de dicha propiedad, dentro del VC, más la tasa neta de flujo de la misma a través de la frontera del VC".

Ecuación de Transporte de Reynolds   VC fijo

$$\boxed{\frac{d}{dt}N_{VC} = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t}\eta\,\rho\,dV + \oint_{SC} \eta\,\rho\,\vec{v}\,dS}$$

1. Para un **VC fijo** **dV = 0**. Si N y ρ no varían con el tiempo (flujo estacionario de un fluido)

$$\frac{d}{dt}N_{VC} = \cancel{\int_{VC} \frac{\partial}{\partial t}\eta\,\rho\,dV} + \oint_{SC} \eta\,\rho\,\vec{v}\;dS \;= \int_{VC} \eta\,\rho\,\vec{v}\,dS_{salida} - \int_{VC} \eta\,\rho\,\vec{v}\,dS_{entrada}$$

2. Si N = masa (m) → $\eta = \frac{dN}{dm} = \frac{dm}{dm} = 1$

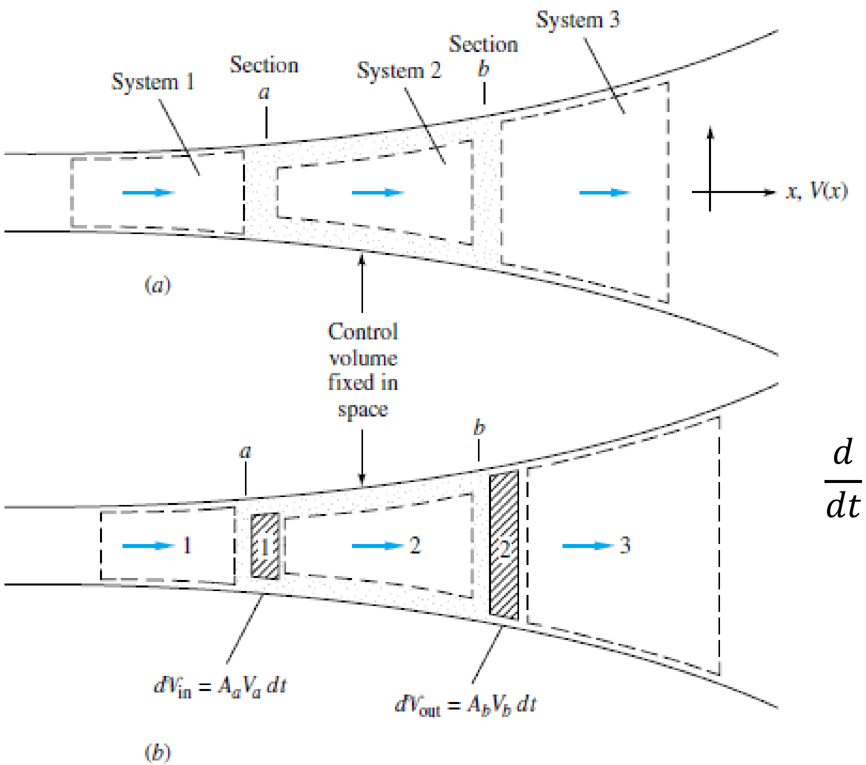
3. Densidad media:

$$\boxed{\rho_{media} = \frac{\int_S \rho \cdot dS}{S}}$$

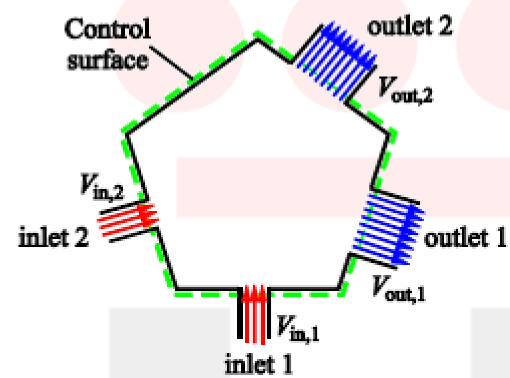
$$v_{media} = \frac{\int_S \vec{v} \cdot dS}{S} = \frac{Q}{S}$$

Ecuación de Transporte de Reynolds

$$\frac{d}{dt}N_{VC} = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t}\eta\,\rho\,dV + \oint_{SC} \eta\,\rho\,\vec{v}\,dS$$



Flujo Unidimensional



$$\frac{d}{dt}N_{VC} = \frac{d}{dt}\left(\int_{VC} \eta\,\rho\,dV\right) + \sum_{salidas} \eta_i\,\rho_i\,v_i\,S_i - \sum_{entradas} \eta_i\,\rho_i\,vi\,S_i$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\int_{VC} \eta\,dm\right) + \sum_{salidas} \eta_i\,m_i - \sum_{entradas} \eta_i\,m_i$$

Ecuación de Transporte de Reynolds

V.C. en movimiento

$$\frac{d}{dt} N_{VC} = \left(\int_{VC} \frac{\partial}{\partial t} \eta \, \rho \, dV \right) + \oint_{SC} \eta \, \rho \, \vec{v}_{relat} \, dS$$

- Movimiento velocidad constante:

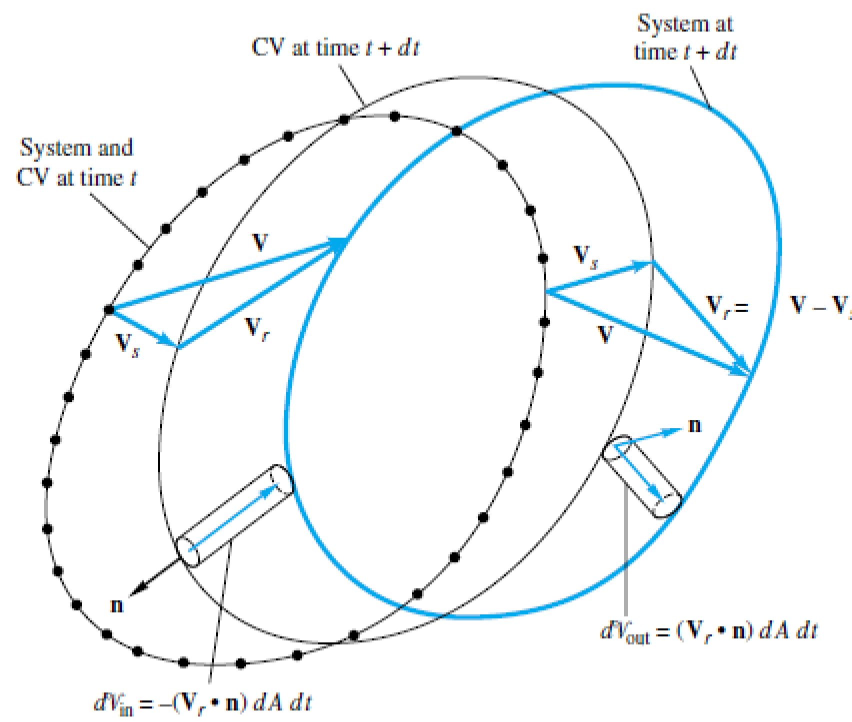
$$\vec{v}_{relat} = \vec{v}$$

- Movimiento con velocidad dependiente del tiempo:

$$\vec{v}_{relat} = \vec{v}\,(r,t) - \vec{v}_s(t)$$

- Movimiento con velocidad dependiente del tiempo y VC deformable:

$$\vec{v}_{relat} = \vec{v}\,(r,t) - \vec{v}_s(r,t)$$



Ley de Conservación de Masa

$$[N = m] \qquad \eta = \frac{m}{m} \text{ o } \frac{dm}{dm} = 1$$

$$\frac{dN}{dt} = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t} \eta\, \rho\, dV + \oint_{SC} \eta\, \rho\, \vec{v}\, dS \quad \Rightarrow \quad \frac{dm}{dt} = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t} \rho\, dV + \oint_{SC} \rho\, \vec{v}\, dS$$

"La masa dentro de un sistema permanece constante en el tiempo".

$$\Rightarrow \quad \frac{dN}{dt} = \frac{dm}{dt} = 0$$

$$\boxed{0 = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t} \rho\, dV + \oint_{SC} \rho\, \vec{v}\, dS}$$

- Flujo estacionario: $\frac{\partial}{\partial t} \rho\, dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\oint_{SC} \rho\, \vec{v}\, dS = 0}$

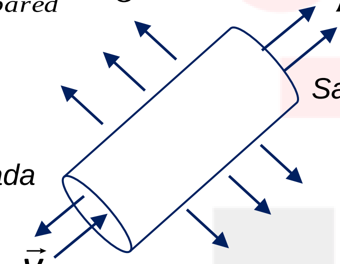
2. Leyes de Conservación

Ley de Conservación de Masa

$$[N = m] \qquad \eta = \frac{m}{m} \; o \; \frac{dm}{dm} = 1$$

$$\boxed{\oint_{SC} \rho \, \vec{v} \, dS = 0}$$

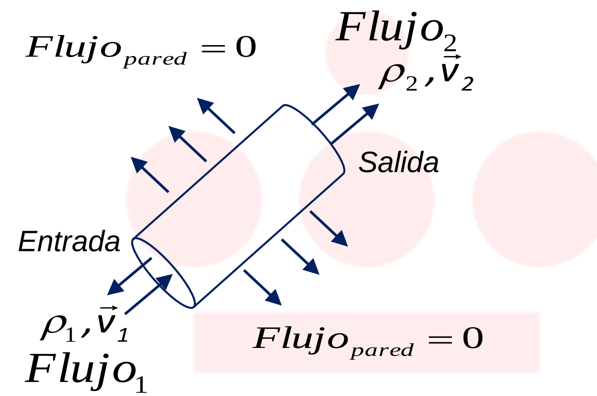
- Flujo es constante, unidimensional:



$$\oint_{SC} \rho \, \vec{v} \, dS = \int_{S1} \rho_1 \vec{v}_1 \, dS + \int_{S2} \rho_2 \vec{v}_2 \, dS = \int_{S2} \rho_2 v_2 \, dS - \int_{S1} \rho_1 v_1 \, dS = 0$$

$$Flujo_2 - Flujo_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad Flujo_2 = Flujo_1$$

Ley de Conservación de Masa

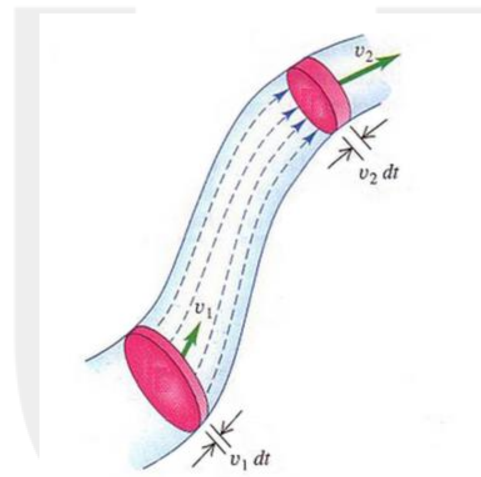


$$\oint_{SC} \rho\, \vec{v}\, dS \;=\; \int_{S1} \rho_1 \vec{v}_1\, dS \;+\; \int_{S2} \rho_2 \vec{v}_2\, dS \;=\; 0$$

$$-\rho_1 v_1 S_1 + \rho_2 v_1 S_2 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_1 S_2$$

Tasa temporal de masa (caudal másico): $\dot{m}$

$$\dot{m} = \rho\, v\, S \;\Rightarrow\; \boxed{\dot{m} = \rho Q} \;\Rightarrow\; \dot{m}_1 = \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 = \dot{m}_2$$



Ecuación de Continuidad: El caudal es igual en toda la extención de la Tuberia

Fluido **incompresible** (ρ = cte) y flujo estacionario $F_1 = F_2$:

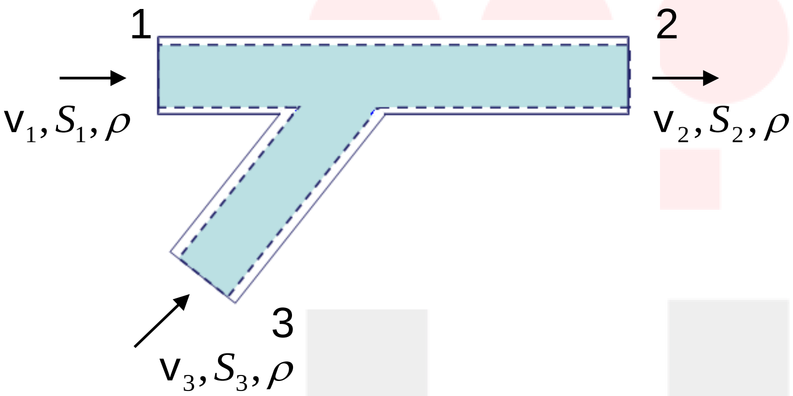
$$\boxed{Q = v_1 S_1 = v_2 S_2}$$

Ecuación de Continuidad

$$\boxed{0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \sum_i (\dot{m}_i)_{salida} - \sum_i (\dot{m})_{entrada}}$$

Ley de Conservación de Masa: Ejemplo 1

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho dV + \sum_i (\dot{m}_i)_{salida} - \sum_i (\dot{m})_{entrada}$$



Fluido **incompresible ρ** = cte : $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$$0 = \sum_i (\dot{m}_i)_{salida} - \sum_i (\dot{m})_{entrada}$$

$$0 = \dot{m}_2 - (\dot{m}_1 + \dot{m}_3) \Rightarrow \dot{m}_1 + \dot{m}_3 = \dot{m}_2$$

$$\rho_1 Q_1 + \rho_3 Q_3 = \rho_2 Q_2 \Rightarrow \rho_1 v_1 S_1 + \rho_3 v_3 S_3 = \rho_2 v_2 S_2$$

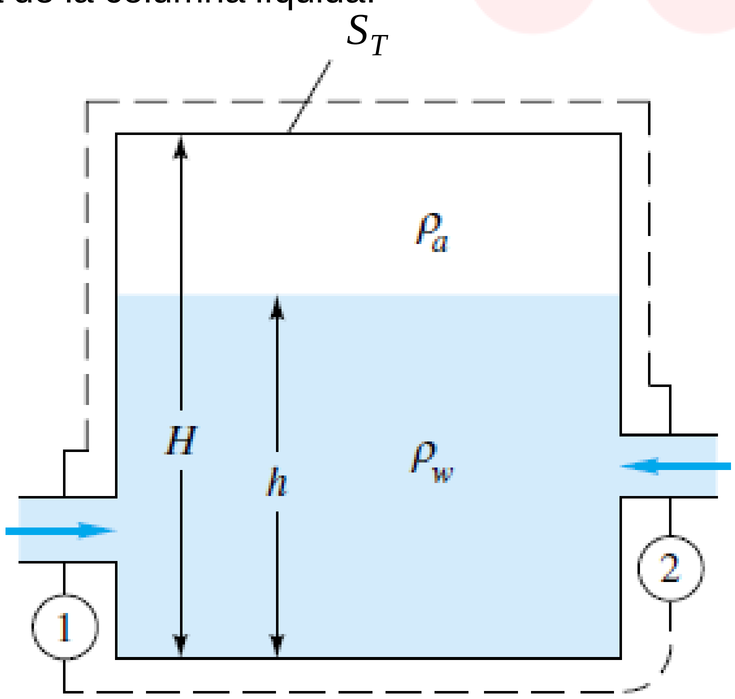
Como **ρ** = cte :

$$\boxed{v_1 S_1 + v_3 S_3 = v_2 S_2}$$

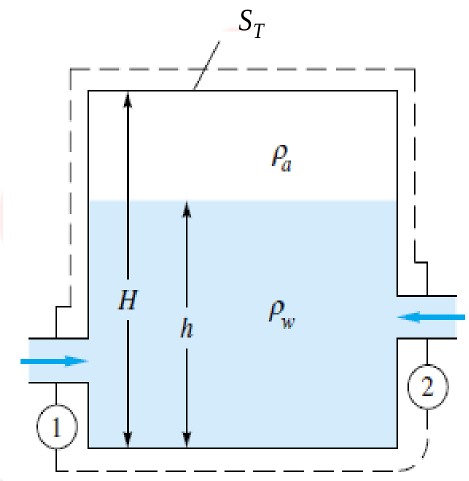
Ley de Conservación de Masa: Ejemplo 2

El tanque de la figura está se está llenado con agua a 20°C a través de dos entradas unidimensionales. En la parte superior del tanque va quedando hay aire atrapado. La altura de la columna líquida es *h*. Obtenga una expresión para la variación temporal de la altura de la columna líquida:

$$\frac{dh}{dt} = ?$$



Ley de Conservación de Masa: Ejemplo 2



$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho dV + \sum_i (\dot{m}_i)_{salida} - \sum_i (\dot{m})_{entrada}$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho dV - \sum_i (\dot{m})_{entrada} \Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho dV - \rho_1 v_1 S_1 - \rho_2 v_2 S_2$$

$$\boldsymbol{\frac{d}{dt}\int_{VC} \rho dV = \rho_1 v_1 S_1 + \rho_2 v_2 S_2} \quad \textbf{(1)}$$

$S_T \rightarrow$ área del tanque: $$\frac{d}{dt}\int_{VC} \rho dV = \frac{d}{dt}[\rho_w S_T h] + \frac{d}{dt}[\rho_a S_T (H-h)]$$

Se desprecia segundo término ($\rho_a \ll \rho_w$): $$\boldsymbol{\frac{d}{dt}\int_{VC} \rho dV = \frac{d}{dt}[\rho_w S_T h]} \quad \textbf{(2)}$$

Alicia García Sánchez

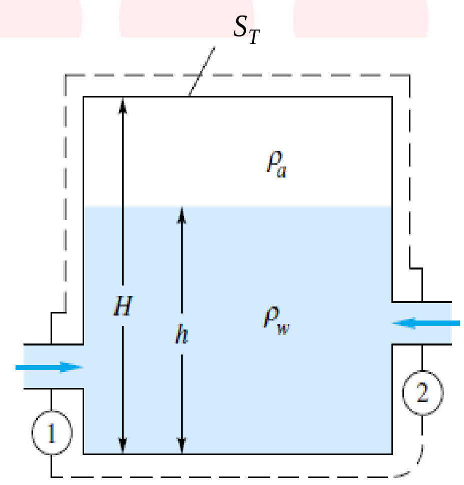
Ley de Conservación de Masa: Ejemplo 2

Igualamos ecuaciones (1) y (2) :

$$\frac{d}{dt}[\rho_w S_T h] = \rho_1 v_1 S_1 + \rho_2 v_2 S_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = \frac{\rho_1 v_1 S_1 + \rho_2 v_2 S_2}{\rho_w S_T}$$

Dado que: $\rho_w = \rho_1 = \rho_2$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{v_1 S_1 + v_2 S_2}{S_T} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{Q_1 + Q_2}{S_T}}$$



Ley de Conservación de la Cantidad de Movimiento Lineal (Momentum)

SEGUNDA LEY DE NEWTON: F = m·a → $F = m \cdot \frac{d\vec{v}}{\mathrm{dt}} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$

Ecuación general de Reynolds: $[N = m\vec{v}]$ $\left[\eta = \frac{m\vec{v}}{m}\right]$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \eta\,\rho\,dV + \oint_{SC} \eta\,\rho\,\vec{v}\,dS \Rightarrow \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{VC}} \rho\,\vec{v}\,dV + \oint_{SC} \vec{v}\,\rho\,\vec{v}\,dS$$

Segunda ley de Newton: $\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$

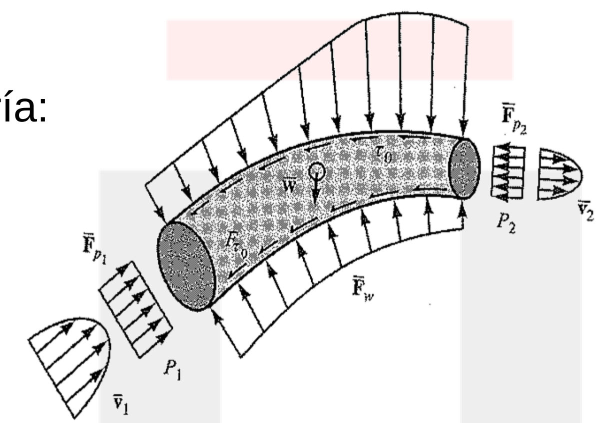
$$\boxed{\sum_i \vec{F}_i = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{VC}} \rho\,\vec{v}\,dV + \oint_{SC} \vec{v}\,\rho\,\vec{v}\,dS}$$

2. Leyes de Conservación

Ley de Conservación de la Cantidad de Movimiento Lineal (Momentum)

$$\boxed{\sum_i \vec{F}_i = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\vec{v}dV + \oint_{SC} \vec{v}\rho\vec{v}dS}$$

Conjunto de fuerzas que actúan sobre VC fijo para una tubería:



- Fuerza gravitatoria, $\vec{W}$
- Fuerzas de presión normales, $\vec{F}_P$
- Fuerzas de presión tangenciales, $\vec{F}_\tau$
- Fuerzas viscosas, $\vec{F}_\eta$
- Fuerzas de corte o presión en las paredes, $\vec{F}_w$

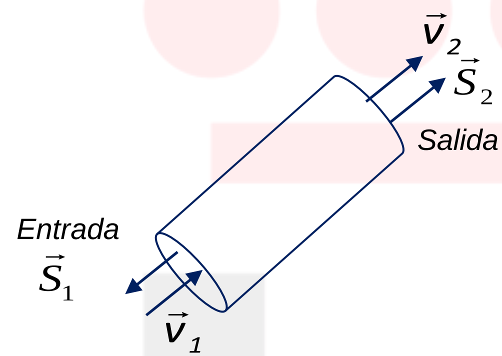
Simplificando: $\sum_i \vec{F}_i = \vec{W} + \vec{F}_{p1} + \vec{F}_{p2} + \vec{F}_r$

2. Leyes de Conservación

Ley de Conservación de la Cantidad de Movimiento Lineal (Momentum)

Intercambio de momentum a la entrada y salida del VC (integral cerrada de superficie), **UNIDIMENSIONAL**

$$\oint_{SC} \vec{v}\rho\vec{v}\, dS = \int_{S_1} \vec{v}_1\, \rho_1\, \vec{v}_1\, dS + \int_{S_1} \vec{v}_2\, \rho_2\, \vec{v}_2\, dS$$



Integrando: $$\oint_{SC} \vec{v}\, \rho\, \vec{v}\, d\vec{S} = -\vec{v}_1(\rho_1 v_1 S_1) + \vec{v}_2(\rho_2 v_2 S_2)$$

Como: $[\dot{m} = \rho\, v\, S]$

$$\oint_{SC} \vec{v}\, \rho\, \vec{v}\, d\vec{S} = -\dot{m}_1\, \vec{v}_1 + \dot{m}_2\, \vec{v}_2$$

Definimos : $$\vec{M}_i = \sum_i (\dot{m}_i\, \vec{v}_\mathrm{i})$$

$$\vec{M}_1 = \sum_i (\dot{m}_i \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{i})_{entrada}$$

$$\vec{M}_2 = \sum_i (\dot{m}_i \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{i})_{salida}$$

$$\oint_{SC} \vec{\boldsymbol{v}}\, \rho\, \vec{\boldsymbol{v}}\, dS = \vec{M}_2 - \vec{M}_1$$

Ley de Conservación de la Cantidad de Movimiento Lineal (Momentum)

$$\sum_i \vec{F}_i = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\vec{v}dV + \oint_{SC} \vec{v}\rho\vec{v}dS$$

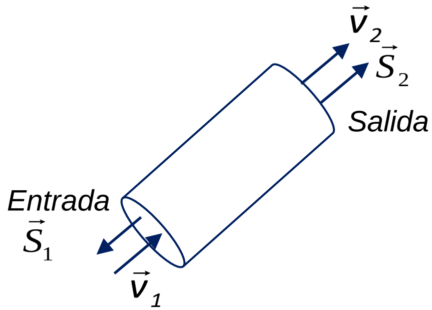
$$\oint_{SC} \vec{v}\,\rho\,\vec{v}\,dS = \vec{M}_2 - \vec{M}_1$$

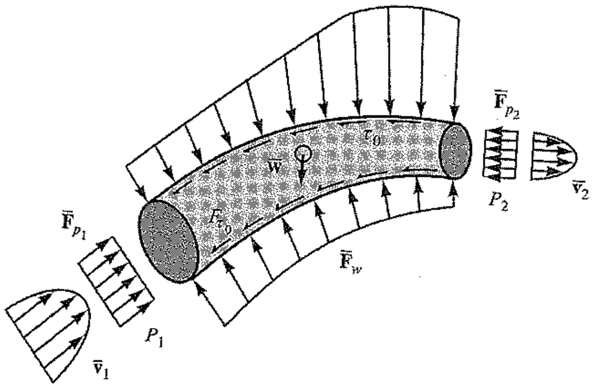
$$\sum_i \vec{F}_i = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\vec{v}dV + \vec{M}_2 - \vec{M}_1$$

$$\boxed{\sum_i \vec{F}_i = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\vec{v}dV + \sum_i (\dot{m}_i\vec{v}_i)_{salida} - \sum_i (\dot{m}_i\vec{v}_i)_{entrada}}$$

Fluido incompresible:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{W} + \vec{F}_{p1} + \vec{F}_{p2} + \vec{F}_r = \sum_i (\dot{m}_i\vec{v}_i)_{salida} - \sum_i (\dot{m}_i\vec{v}_i)_{entrada}$$



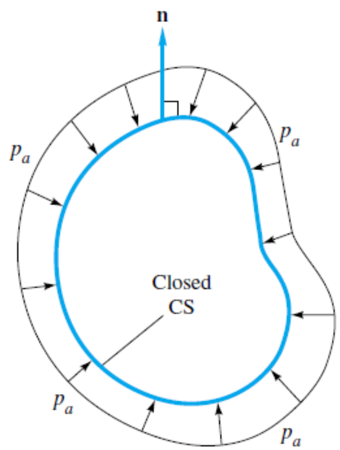


Ley de Conservación de la Cantidad de Movimiento Lineal (Momentum)

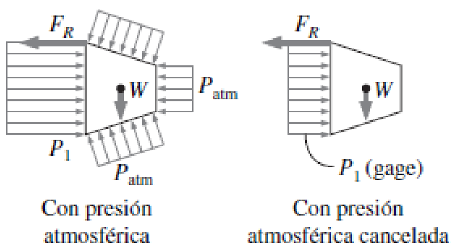
Fuerzas superficiales que actúan sobre un V.C

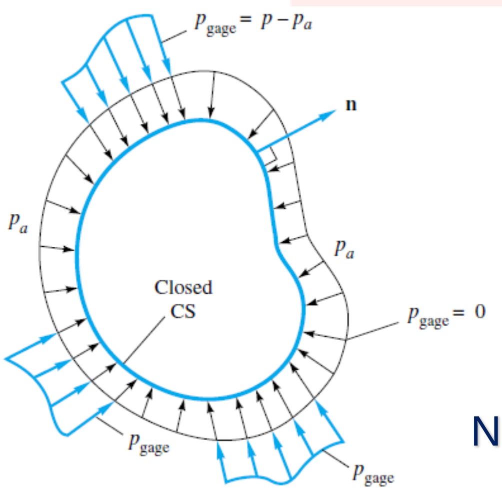
(1) Fuerzas debido a las presiones y tensiones de viscosidad del fluido circundante.

(2) Fuerzas cortantes (tangenciales) sobre los cuerpos sólidos que sobresalen a través de la superficie de control.



Uniforme





No Uniforme

$$\vec{F} = \int_{SC} p_a(-\vec{n})dS = -p_a \int_{SC} -\vec{n}dS = 0 \qquad \vec{F} = \int_{SC} p(-\vec{n})dS = \int_{SC} (p - p_a)(-\overrightarrow{n})dS = \int_{SC} p_{man}(-\overrightarrow{n})dS$$

Ley de Conservación de la Cantidad de Movimiento Lineal: Ejemplo 1

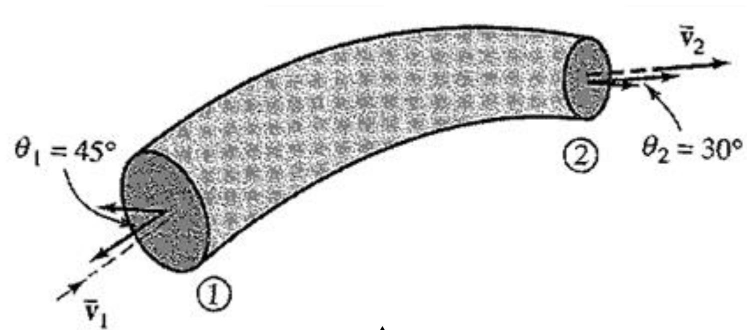
Suponga las condiciones de tubería que aparecen en la figura a través de la cual circula agua. Los radios de entrada y salida de flujo son 25 y 15 cm, respectivamente; los ángulos se señalan en la figura y el caudal es de 50 Ls^{-1}. Si las presiones medias (promediadas) en las áreas de entrada y salida son 8,5 y 5,8 kPa, respectivamente; y el peso total de la tubería es 2 N. Encontrar la fuerza resultante requerida para mantener la tubería en reposo.

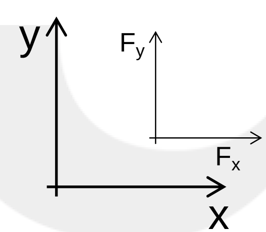
Consideramos al fluido como incompresible, estacionario y sin fricción: $\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho \vec{v} dV = 0$

$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_i (\dot{m}_i \vec{v}_i)_{salida} - \sum_i (\dot{m}_i \vec{v}_i)_{entrada}$$

$$\sum_i \vec{F}_i = \overrightarrow{W} + \vec{F}_{p1} + \vec{F}_{p2} = \sum_i (\dot{m}_i \vec{v}_i)_{salida} - \sum_i (\dot{m}_i \vec{v}_i)_{entrada}$$

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_R = \sum \vec{F}_x + \sum \vec{F}_y$$





Alicia García Sánchez

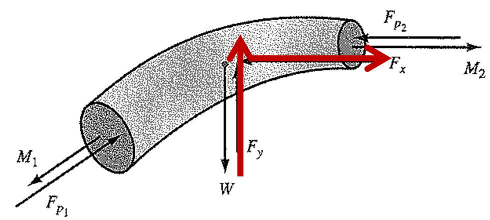
Ley de Conservación de la Cantidad de Movimiento Lineal: Ejemplo 1

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{M}_2 - \vec{M}_1$$

x: $F_x + F_{p1}\cos 45º - F_{p2}\cos 30º = -M_1 \cos 45º + M_2 \cos 30º$

y: $-W + F_y + F_{p1}\, sen\, 45º - F_{p2}\, \text{sen}\, 30º = -M_1\, sen\, 45º + M_2\, sen\, 30º$

Suponemos la siguientes direcciones para los vectores **F_x** y **F_y**:



$$\begin{cases} F_{p1} = p_1 S_1 = 1669\,N \\ F_{p2} = p_2 S_2 = 412\,N \end{cases} \qquad \begin{cases} M_1 = \dot{m}_1 v_1 = \rho Q v_1 = \dfrac{\rho Q^2}{S_1} = 12{,}8\,N \\ M_2 = \dot{m}_2 v_2 = \rho Q v_2 = \dfrac{\rho Q^2}{S_2} = 13{,}48\,N \end{cases}$$

Sustituyendo en las ecuaciones de los ejes:

$$\begin{cases} F_x = -812\,N \\ F_y = -963\,N \end{cases}$$

Los signos negativos indican que las direcciones supuestas no eran correctas.

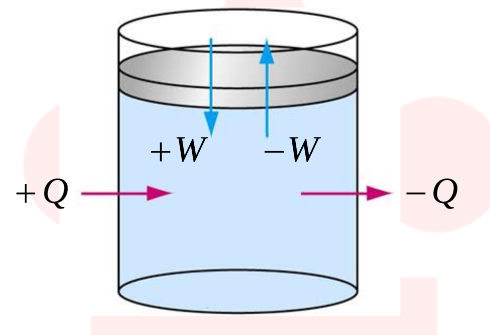
$$F_R^2 = F_x^2 + F_y^2$$

$$\boxed{F_R = 1253\,N}$$

2. Leyes de Conservación

Ley de Conservación de Energía

Primera Ley de la termodinámica, expresión diferencial:



$$dU = \delta Q + \delta W \Rightarrow \delta W = -p\,dV \Rightarrow W = -\int_V p\,dV$$

Definimos : $[U = E]$ $[N = E]$ $\Rightarrow \left[\eta = \frac{E}{m} = e\right]$

Ecuación general de Reynolds:

$$\frac{\delta Q}{dt} + \frac{\delta W}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\, e\, dV + \oint_{SC} \rho\, e\, \vec{v}\, dS \Rightarrow \delta W \begin{cases} \delta W_p & \text{fuerzas de presión} \\ \delta W_s & \text{fuerzas cortantes} \end{cases}$$

Diferencial de las **fuerzas de presión**:

$$\delta W_P = -dt \int_V p dV \Rightarrow \delta W_P = -dt \oint_{SC} p \frac{d\vec{x}}{dt} dS = -dt \oint_{SC} p\, \vec{v}\, dS$$

Simulamos el trabajo realizado por las **fuerzas cortantes** como el trabajo de un **eje de rotación**.

Ley de Conservación de Energía

$$\frac{\delta Q}{dt}+\frac{\delta W_s}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho\, e\, dV+\oint_{SC} p\,\vec{v}\, dS+\oint_{SC}\rho\, e\,\vec{v}\, dS$$

Simplificando:

$$\frac{\delta Q}{dt}+\frac{\delta W_s}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho\, e\, dV+\oint_{SC}\left(\frac{p}{\rho}+e\right)\rho\,\vec{v}\, dS$$

Despreciando fuerzas coulombianas, nucleares y posibles fuerzas viscosas $\rightarrow$ **energía interna específica** del sistema:

$$e=e_p+e_c+u^*$$

$[u^*]$: *energía intrínseca específica*

$$e=g\,z+\frac{v^2}{2}+u^*$$

Sustituyendo en la ecuación de conservación:

$$\frac{\delta Q}{dt}+\frac{\delta W_s}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho\left(g\,z+\frac{v^2}{2}+u^*\right)dV+\oint_{SC}\left(\frac{p}{\rho}+g\,z+\frac{v^2}{2}+u^*\right)\rho\,\vec{v}\, dS$$

2. Leyes de Conservación

Ley de Conservación de Energía

Flujo estacionario, integral de superficie en cada frontera:

$$\boxed{\frac{\delta Q}{dt}+\frac{\delta W_s}{dt}=\int_{S_2}\left(\frac{p_2}{\rho_2}+g\,z_2+\frac{v_2^2}{2}+u_2^*\right)\rho_2 v_2 dS_2-\int_{S_1}\left(\frac{p_1}{\rho_1}+g\,z_1+\frac{v_1^2}{2}+u_1^*\right)\rho_1 v_1 dS_1}$$

1 = Entrada
2 = Salida

$$\frac{p}{\rho}+g\,z+\frac{v^2}{2} \Rightarrow \text{energía disponible (mecánica)}\left[\frac{J}{kg}\right]$$

Consideraciones de la ecuación de energía mecánica:

Habitual encontrarla en CARGA [m]

- Energía de flujo, trabajo de flujo: $\frac{p}{\rho} \Rightarrow \frac{p}{\rho\,g}=\frac{p}{\gamma}$ ***Carga de presión***

  Cuando un punto del fluido está expuesto a la atmósfera, la presión se considera nula y el término se cancela.

- Energía potencial: $g\,z \Rightarrow \frac{g\,z}{g}=z$ ***Carga de elevación***

  Cuando los puntos de referencia están a la misma elevación, los términos se cancelan.

- Energía cinética: $\frac{v^2}{2} \Rightarrow \frac{v^2}{2\,g}$ ***Carga de velocidad***

  La carga en la superficie de un depósito se considera nula.

  Cuando los puntos de referencia están dentro de una tubería del mismo tamaño, los términos son iguales y se anulan.

Ley de Conservación de Energía

Simplificaciones:

$$\frac{\delta Q}{dt}+\frac{\delta W_s}{dt}=\int_{S_2}\left(\frac{p_2}{\rho_2}+g\,z_2+\frac{v_2^2}{2}+u_2^*\right)\rho_2 v_2 dS_2-\int_{S_1}\left(\frac{p_1}{\rho_1}+g\,z_1+\frac{v_1^2}{2}+u_1^*\right)\rho_1 v_1 dS_1$$

- Energía intrínseca constante o uniforme a través de cada área:

$$\int_S u^*\rho\,v\,dS=u^*\int_S\rho\,v\,dS$$

Recordatorio: $\left[\dot{m}=\int_s\rho\,v\,dS\right]$

- Elevación o altura $\rightarrow$ valor promediado o centroide del área Zc.

$$\int_S g\,z\,\rho\,v\,dS=g\,z_c\int_S\rho\,v\,dS$$

- Presión y densidad distribuidas uniformemente a través del área (conductos de diámetro pequeños).

$$\int_S\frac{p}{\rho}\rho\,v\,dS=\frac{p}{\rho}\int_S\rho\,v\,dS$$

- Conductos de grandes diámetros, prevalece componente hidrostática importante $\rightarrow$ calcular presión promedio, líneas de corriente paralelas a la tubería y perpendiculares a la gravedad.

$$\int_S\left(\frac{p}{\rho}+g\,z\right)\rho\,v\,dS=\left(\frac{p}{\rho}+g\,z\right)\int_S\rho\,v\,dS$$

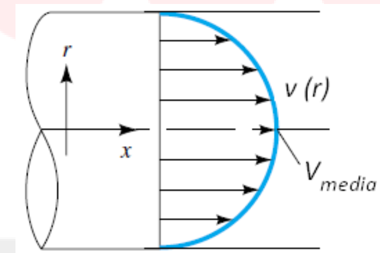
Ley de Conservación de Energía

Simplificaciones:

$$\boxed{\frac{\delta Q}{dt}+\frac{\delta W_s}{dt}=\int_{S_2}\left(\frac{p_2}{\rho_2}+g\,z_2+\frac{v_2^2}{2}+u_2^*\right)\rho_2 v_2 dS_2-\int_{S_1}\left(\frac{p_1}{\rho_1}+g\,z_1+\frac{v_1^2}{2}+u_1^*\right)\rho_1 v_1 dS_1}$$

- Fronteras sólidas en conductos → NO velocidad uniforme.

$$\int_S \frac{v^2}{2}\rho\, v\, dS=\int_S \frac{v^3}{2}\rho\, dS\neq\frac{U^3}{2}\rho\, S$$



Factor de corrección α de la velocidad:

$$\alpha\, E_c^{real}=E_c^{media}\;\Rightarrow\;\alpha\,\frac{\rho}{2}\int_S v^3\, dS=\frac{\rho}{2}U^3\, S\;\Rightarrow\;\alpha=\frac{U^3\, S}{\int_S v^3\, dS}\;\Rightarrow\;\int_S\frac{v^2}{2}\rho\, v\, dS=\frac{U^2}{2\alpha}\rho\, v\, S$$

Sustituyendo:

$$\left(\frac{p_1}{\rho_1}+g\,z_1+\frac{v_1^2}{2\alpha_1}\right)\dot m_1-\left(\frac{p_2}{\rho_2}+g\,z_2+\frac{v_2^2}{2\alpha_2}\right)\dot m_2=u_2^*\,\dot m_2-u_1^*\,\dot m_1-\frac{\delta Q}{dt}-\frac{\delta W_s}{dt}$$

$$GENERAL\;:\;\frac{dE}{dt}=0+\sum_{SALIDAS}e\cdot\dot m-\sum_{ENTRADAS}e\cdot\dot m$$

Ley de Conservación de Energía

Aplicando la ecuación de continuidad: $\dot{m} = \dot{m}_1 = \dot{m}_2$

$$\left(\frac{p_1}{\rho_1} + g\, z_1 + \frac{v_1^2}{2\alpha_1}\right)\dot{m}_1 - \left(\frac{p_2}{\rho_2} + g\, z_2 + \frac{v_2^2}{2\alpha_2}\right)\dot{m}_2 = u_2^*\,\dot{m}_2 - u_1^*\,\dot{m}_1 - \frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W_s}{dt}$$

$$\left(\frac{p_1}{g\rho_1} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g\alpha_1}\right) - \left(\frac{p_2}{g\rho_2} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g\alpha_2}\right) = \frac{u_2^* - u_1^*}{g} - \dot{q} - \dot{w}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{u_2^* - u_1^*}{g} - \dot{q} = h_f & \Rightarrow \textbf{Pérdida de carga por fricción} \\ -\dot{w}_S = h_S & \Rightarrow \textbf{Carga del eje} \end{array}\right.$$

$\boxed{\dot{q} = c_p T}$

Se ha incluido el trabajo asociado a las fuerzas viscosas en ***h_f***.

$$\boxed{\left(\frac{p_1}{\gamma_1} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g\alpha_1}\right) = \left(\frac{p_2}{\gamma_2} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g\alpha_2}\right) + h_f + h_S}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} h_f & \text{pérdidas de carga} \\ h_s & \text{cargas de impulsión} \end{array}\right.$$

2. Leyes de Conservación

Ley de Conservación de Energía

Consideramos una tubería y entre los puntos de entrada y salida se coloca una bomba o una turbina.

$$\left(\frac{p_1}{\gamma_1}+z_1+\frac{v_1^2}{2g\alpha_1}\right)=\left(\frac{p_2}{\gamma_2}+z_2+\frac{v_2^2}{2g\alpha_2}\right)+h_f+h_{turbina}-h_{bomba}$$

Flujo estacionario para un fluido ideal incompresible

$$\boxed{\left(\frac{p}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}+z\right)_{entrada}=\left(\frac{p}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}+z\right)_{salida}+h_{fricción}+h_{turbina}-h_{bomba}}$$

Ecuación de Darcy → factor de fricción adimensional (***f***) función directa de dicha caída de presión:

$$\boxed{\Delta P=h_f=f\,\frac{v^2}{2g}\,\frac{L}{d}}$$

2. Leyes de Conservación

Ley de Conservación de Energía Mecánica

Flujo ideal: estacionario, incompresible, no viscoso, sin fricción, sin agentes externos

$$\boxed{\left[\alpha_1 = \alpha_2 = 1,\ h_{fricción} = h_{turbina} = h_{bomba} = 0,\ \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma\right]}$$

$$\begin{cases} (1) \quad \dfrac{p}{\gamma} + \dfrac{v^2}{2g} + z = cte \quad [z] = m \\ (2) \quad \dfrac{p}{\rho} + \dfrac{v^2}{2} + gz = cte \quad [gz] = J/kg \\ (3) \quad p + \dfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = cte \quad [\rho g z] = Pa \end{cases}$$

Ecuación (Teorema) de Bernoulli